Санкт–Петербургский государственный университет, 2000-2001 год
факультет прикладной математики–процессов управления

Региональная олимпиада по математике

1 тур (октябрь 2000 года)

1. Найти сумму квадратов корней уравнения $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$.
2. Многочлен $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ при делении на $(x-a)$ дает в остатке A, а при делении на $(x-b)$ дает в остатке B. Найти остаток от деления этого многочлена на произведение $(x-a)(x-b)$, если $a\neq b$.
3. Найти площадь четырехугольника, координаты вершин которого удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{20}{x+y}, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$
4. Найти наименьшее целое положительное решение неравенства
$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^3-\frac{25}{9}>\frac{3x^2+\frac{4}{9}}{2\left(x-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{x\left(x-\frac{8}{3}\right)}}.$$
5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.
6. Некоторое количество денег было разложено на n кучек. После этого из первой кучки переложили во вторую $\frac{1}{n}$ часть бывших в первой кучке денег. Затем из второй кучки $\frac{1}{n}$ оказавшихся в ней после перекладывания денег переложили в третью кучку. Далее $\frac{1}{n}$ часть денег, получившихся после этого в третьей кучке, переложили в четвертую и так далее. Наконец из n-й кучки $\frac{1}{n}$ часть оказавшихся в ней после предшествующего перекладывания денег переложили в первую кучку. После этого в каждой кучке стало по A рублей. Сколько денег было в каждой кучке до перекладывания?
7. В треугольнике ABC, все стороны которого различны, биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $|AB|-|BD|=a,\ |AC|+|CD|=b$. Найти $|AD|$.

Санкт–Петербургский государственный университет, 2000-2001 год
факультет прикладной математики–процессов управления

Региональная олимпиада по математике

2 тур (февраль 2001 года)

1. Объём A составляет m-ю часть суммы объемов B и C, а объём B составляет n -ю часть суммы объёмов A и C. Какую часть суммы объёмов A и B составляет C?
2. Вычислить произведение корней уравнения
$$\left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\frac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\frac{1+x}{x^3+x^4+x^5}-\frac{1-x+x^2}{x^3}\right)=\frac{1}{3}.$$
3. Найти формулу, связывающую a , b и c , если корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ образуют геометрическую прогрессию.
4. Вычислить длину l биссектрисы внешнего угла A треугольника ABC, если даны его стороны b и c $(b \neq c)$ и угол A между ними. Пояснение: длиной биссектрисы внешнего угла A треугольника называется длина отрезка, заключенного между точкой A и точкой пересечения биссектрисы с продолжением стороны a .
5. Найти сумму всех целых положительных решений неравенства $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}<35-2x$.
6. Найти периметр пространственного многоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2-z^2=20, \\ x^4+y^4-z^4=560. \end{cases}$
7. В треугольнике ABC взяты точки: M на стороне $[AC]$, N на стороне $[BC]$, P на отрезке $[MN]$, причём $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{|CN|}{|NB|}=\frac{|MP|}{|PN|}$. Найти площадь треугольника ABC, если площади треугольников AMP и BNP равны T и Q.