

**Выпускной экзамен 2001 года**  
(Россия, математические классы)

**№ 1-01 А-11-МК**

**1 вариант**

1. Найдите критические точки, промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции  $g(t) = t^2 + 6\sqrt[3]{t}$ .
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции  $f(x) = (x-1)|x|$ .
3. Решите неравенство  $3^{2p^2-p+2} - 5^{2p^2-p-1} > 5^{2p^2-p+1} + 3^{2p^2-p-1}$ .
4. Известно, что комплексные числа  $z$  и  $2\bar{z} - 1 + i$  имеют одинаковый модуль. В каких пределах может изменяться значение этого модуля?
5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\sin^2 x - a^2 \cos x = a$  имеет нечетное число корней на промежутке  $(-7\pi; 7\pi]$ ?
6. Решите неравенство  $\log_{\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{7}}(x^3 - 5x - 1) \leq 0$ . (Не разрешается использовать микрокалькулятор и таблицы).

**2 вариант**

1. Найдите критические точки, промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции  $f(x) = x - 5\sqrt[5]{x}$ .
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции  $g(x) = |x|(x+2)$ .
3. Решите неравенство  $2^{t^2+t+1} - 3^{t^2+t} \geq 3^{t^2+t-1} - 2^{t^2+t}$ .
4. Известно, что комплексные числа  $z$  и  $2+i-0,5\bar{z}$  имеют одинаковый модуль. В каких пределах может изменяться значение этого модуля?
5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\sin^2 x + 2a \cos x = a^2$  имеет нечетное число корней на промежутке  $(-5\pi; 5\pi]$ ?
6. Решите неравенство  $\log_{\sqrt[3]{19}-\sqrt[3]{6}}(x^3 - 13x + 19) < 0$ . (Не разрешается использовать микрокалькулятор и таблицы).

## 1 вариант

1. Найдите все комплексные числа с положительной мнимой частью, удовлетворяющие уравнению  $z^2 + 15 - 8i = 0$ .
2. Изобразите на координатной плоскости  $(x; y)$  множество точек, удовлетворяющих системе неравенств  $\begin{cases} |y| - x^2 + 4|x| - 4 \leq 0 \\ |x| \leq 2 \end{cases}$  и вычислите площадь фигуры, состоящей из этих точек.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = (2x + 3)\sqrt{2x + 3} + x^2$ , не имеющих общих точек с прямой  $y = x$ .
4. Какова вероятность того, что четырехзначное число, в десятичной записи которого используются по одному разу цифры 5; 2; 3; 1, и только они, делится на 4?
5. Решите неравенство  $\log_{2-2^y} \frac{2^{2y+5} - 7\left(\frac{1}{2}\right)^y}{2^{1-y} - 1} + 1 \leq 0$ .
6. При каких значениях параметра  $a$  существует хотя бы одно значение  $b$  такое, что на промежутке  $(b; b + 4\pi)$  уравнение  $3\cos x + 4\sin x = a$  имеет ровно один корень? Для каждого такого  $a$  укажите все значения  $b$ .

## 2 вариант

1. Найдите все комплексные числа с отрицательной мнимой частью, удовлетворяющие уравнению  $z^2 - 5 - 12i = 0$ .
2. Изобразите на координатной плоскости  $(x; y)$  множество точек, удовлетворяющих условию  $|y| + x^2 - 2|x| - 3 \leq 0$ , и вычислите площадь фигуры, состоящей из этих точек.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции  $y = g(x)$ , где  $g(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x} - x^2$ , не имеющих общих точек с прямой  $y = 3x$ .
4. Какова вероятность того, что четырехзначное число, в десятичной записи которого используются по одному разу цифры 1; 2; 7; 5, и только они, делится на 25?
5. Решите неравенство  $\log_{2^t-1} (9 \cdot 2^{3-2t} - 2^{t+1}) - 2 \leq 0$ .
6. При каких значениях параметра  $a$  существует хотя бы одно значение  $b$  такое, что на промежутке  $(b - 2\pi; b + 2\pi)$  уравнение  $4\cos x - 3\sin x = a$  имеет ровно один корень? Для каждого такого  $a$  укажите все значения  $b$ .

## 1 вариант

1. Среди комплексных чисел  $z$  с аргументом  $\frac{\pi}{4}$  найдите все такие, для которых  $\operatorname{Im}(8z - z^3) = 0$ , ( $z \neq 0$ ).
2. Решите уравнение  $2|\cos x| - 3\cos x - 4|\sin x| - 5\sin x = 0$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \log_{0,2}(11 - 2x^2) = \log_{0,2}(2y^2 - 5xy + 11), \\ \log_y(x^3) + \log_{2x}y - 5 = 0. \end{cases}$$
4. Найдите все первообразные функции  $f(x) = 6x - 2$ , для которых выполняются два условия: на промежутке  $(1; 2)$  графики функций  $f(x)$  и  $F(x)$  не имеют общих точек и площадь фигуры, ограниченной этими графиками и прямыми  $x = 1$  и  $x = 2$ , равна 1.
5. Исследуйте на выпуклость функцию  $y = \sqrt[50]{x}$  и, используя полученный результат, сравните числа  $\frac{\sqrt[50]{2} + \sqrt[50]{3}}{2}$  и  $\sqrt[50]{2,5}$ .
6. При каких значениях параметра  $a$  ровно три точки графика функции  $y = 4x^3 + 2x^2 + a$  равноудалены от осей координат?

## 2 вариант

1. Среди таких комплексных чисел  $z$ , что  $(z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 4i\sqrt{3}$ , найдите все числа с аргументом  $\frac{\pi}{3}$ .
2. Решите уравнение  $4|\cos x| + 6\cos x - 5|\sin x| + 3\sin x = 0$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \log_{0,3}(3 - x^2) = \log_{0,3}(8y^2 - 6xy + 3), \\ \log_yx + \log_x(2y) = -1. \end{cases}$$
4. Найдите все первообразные функции  $f(x) = 6x + 2$ , для которых выполняются два условия: на промежутке  $(2; 3)$  графики функций  $f(x)$  и  $F(x)$  не имеют общих точек и площадь фигуры, ограниченной этими графиками и прямыми  $x = 2$  и  $x = 3$ , равна 11.
5. Исследуйте на выпуклость функцию  $y = x^{100}$  и, используя полученный результат, сравните числа  $\frac{3^{100} + 2^{100}}{2}$  и  $\left(\frac{5}{2}\right)^{100}$ .
6. При каких значениях параметра  $a$  ровно три точки графика функции  $y = x^3 - x^2 + a$  равноудалены от осей координат?

## 1 вариант

1. Решите уравнение  $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x + \sin^2 \frac{3x}{2} = 1,5$ .
2. Пусть  $f(x; y) = \log_{\frac{y}{2+x^2}} \left( 0,5x^2 + 0,5 - y^2 + \frac{6x}{y} \right) + 1$ . При каких  $x$  выражение  $f(x; 2)$  принимает неотрицательные значения?
3. Изобразите на комплексной плоскости множество таких комплексных чисел  $z$ , для которых числа  $z$  и  $2\bar{z} + 4 - 4i$  имеют одинаковый аргумент.
4. Какова вероятность того, что пятизначное число, в десятичной записи которого используются по одному разу цифры 3; 7; 2; 0; 4, и только они, нечетное?
5. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $t^5 - 5t^4 + at + b = 0$  для любого значения параметра  $b$  имеет ровно один корень.
6. Напишите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \int_{-2}^x \frac{\sin \frac{\pi t}{4}}{t^2 + 2} dt$  в точке графика с абсциссой  $x_0 = 2$ .

## 2 вариант

1. Решите уравнение  $\cos^2 2x + \cos^2 4x + \cos^2 6x = 1,5$ .
2. Пусть  $g(x; y) = 1 - \log_{x+y^2} (x^2 + xy + 3y - 1)$ . При каких  $y$  выражение  $g(1; y)$  принимает неотрицательные значения?
3. Изобразите на комплексной плоскости множество таких комплексных чисел  $z$ , для которых числа  $z$  и  $2 + 4i - \bar{z}$  имеют одинаковый аргумент.
4. Какова вероятность того, что пятизначное число, в десятичной записи которого используются по одному разу цифры 8; 7; 5; 0; 9, и только они, нечетное?
5. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $0,2u^5 - au^4 + 3u + b = 0$  для любого значения параметра  $b$  имеет ровно один корень.
6. Напишите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \int_{-4}^x \frac{t \cdot e^{t^2-16}}{3 + \cos \pi t} dt$  в точке графика с абсциссой  $x_0 = 4$ .