

Выпускной экзамен 1999 года
(Санкт-Петербург, общеобразовательные классы)

Вариант 1

Из четырех предложенных сюжетов следует выбрать три. Таким образом, получится 12 пунктов. Для получения оценки “5” Вам достаточно верно и полностью решить любые 10 из них. Пользоваться калькуляторами нельзя. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Дана функция $f(x) = \sin x$.

а) Вычислите $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, если $f(x) = \frac{12}{13}$ и $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

б) Докажите тождество $\frac{f(x) + f(2x) + f(3x)}{2f(2x)} = 2\cos x + 1$.

в) Решите уравнение $f(x) + f(2x) + f(3x) = 0$.

г) Решите неравенство $\frac{f(x) + f(2x) + f(3x)}{2f(2x)} \leq 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

2. Дана функция $f(x) = \log_2(16 - x^2) - \log_2(x + 2)$.

а) Найдите область определения данной функции.

б) Вычислите $\left(\frac{1}{4}\right)^{f(2)}$.

в) Решите уравнение $f(x) = f(2)$.

г) Решите систему уравнений $\begin{cases} y = f(x), \\ 2^{y+2} - 2^y = 9. \end{cases}$

3. Дана функция $f(x) = \sqrt{10ax - x^2}$.

а) Найдите значение a , при котором $x = 1$ является корнем уравнения $f(x) = 4 - x$.

б) Решите уравнение $f(x) = 4 - x$ при $a = 1$.

в) Сравните числа $2f(4)$ и $f(3) + f(5)$ при $a = 1$.

г) Найдите все значения a , при которых уравнение $f(x) = a$ имеет два различных корня.

4. Дана функция $f(x) = 4x^3 - 12x^2$.

а) Найдите для данной функции первообразную $F(x)$, график которой проходит через начало координат.

б) Найдите промежутки монотонности найденной первообразной $y = F(x)$.

в) Постройте график найденной первообразной $y = F(x)$ и касательную к нему в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = F(x)$ и осью абсцисс.

Выпускной экзамен 1999 года
(Санкт-Петербург, общеобразовательные классы)

Вариант 2

Из четырех предложенных сюжетов следует выбрать три. Таким образом, получится 12 пунктов. Для получения оценки “5” Вам достаточно верно и полностью решить любые 10 из них. Пользоваться калькуляторами нельзя. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Дана функция $f(x) = \cos x$.

а) Вычислите $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, если $f(x) = \frac{4}{5}$ и $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

б) Докажите тождество $\frac{f(x) - f(2x) + f(3x)}{2f(2x)} = 2\cos x - 1$.

в) Решите уравнение $f(x) - f(2x) + f(3x) = 0$.

г) Решите неравенство $\frac{f(x) - f(2x) + f(3x)}{2f(2x)} \geq 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$.

2. Дана функция $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(25 - x^2) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)$.

а) Найдите область определения данной функции.

б) Вычислите $4^{f(1)}$.

в) Решите уравнение $f(x) = f(1)$.

г) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^y = 9 \\ y = f(x) \end{cases}$$

3. Дана функция $f(x) = \sqrt{7bx + 2x^2}$.

а) Найдите значение b , при котором $x = 1$ является корнем уравнения $f(x) = x + 3$.

б) Решите уравнение $f(x) = x + 3$ при $b = 2$.

в) Сравните числа $\frac{f(1)}{2} + f(3)$ и $f(4)$ при $b = 2$.

г) Найдите все значения b , при которых уравнение $f(x) + b = 0$ имеет два различных корня.

4. Дана функция $f(x) = -12x^2 - 4x^3$.

а) Найдите для данной функции первообразную $F(x)$, график которой проходит через начало координат.

б) Найдите промежутки монотонности найденной первообразной $y = F(x)$.

в) Постройте график найденной первообразной $y = F(x)$ и касательную к нему в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = F(x)$ и осью абсцисс.