**Выпускной экзамен 2000 года**
(Санкт–Петербург, математические классы)

## Вариант 1

Из трех предложенных “сюжетов на выбор” Вам следует выбрать один. Таким образом у Вас получится три сюжета — два “обязательных” и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки “5” Вам достаточно верно и полностью решить любые 10 из них. Пользоваться калькуляторами нельзя. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

### *Обязательные задачи*

**1. Дана функция** $f(x)=3^{x^2-2x}$.

а) Решите уравнение $f(x)=\frac{1}{3}$.

б) Решите неравенство $f(x)<1$.

в) Сравните числа $f(\log_{\frac{1}{2}} 3)$ и $f(\log_{\frac{1}{4}} 5)$.

г) Укажите ординаты всех таких точек графика функции $f$, что для каждой из них расстояние от нее до другой точки графика функции $f$ с той же ординатой не меньше $2$ и не больше $4$.

**2. Дана функция** $f(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos 2x$.

а) Решите уравнение $f(x)=0$.

б) Вычислите $f\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

в) Решите неравенство $f(x)>\frac{1-\sin x}{4}$ на отрезке $\left[0;\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

г) Найдите множество значений функции $f$ на отрезке $[0;\pi]$.

### *Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)*

**3.А. Дано выражение** $f(z)=z^2-az-a+4$ **и множество** $\mathrm{M}$ **комплексных чисел, удовлетворяющих условию** $iz+\bar{z}=0$. **Точка** $\mathrm{K}$ **комплексной плоскости, соответствующая комплексному числу** $z$**, обозначается** $\mathrm{K}(z)$.

а) Изобразите на чертеже множество $\mathrm{M}$.

б) Пусть $a=2$. Найдите все корни уравнения $f(z)=0$, принадлежащие множеству $\mathrm{M}$.

в) Изобразите на чертеже множество комплексных чисел $u=iz$, где $z\in\mathrm{M}$.

г) Пусть $O(0);\ A(-2i);\ B(z_0);\ C(-2)$. Найдите все вещественные числа $a$, при которых уравнение $f(z)=0$ имеет такой корень $z_0$, что в четырехугольник $OABC$ можно вписать окружность.

**3.Б. Дана функция** $f(x)=\sqrt{4x+1}-2x+1$.

а) Решите неравенство $f(x)\geq 0$.

б) Найдите наибольшее значение функции $f$.

в) Постройте множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих условию $|y-1|\leq f(x)$.

г) Наудачу выбирают пару чисел $(x;y)$ таких, что $|y-1|\leq f(x)$. Определите вероятность того, что $x\geq 0$.

**Выпускной экзамен 2000 года**
(Санкт–Петербург, математические классы)

**3.В. Дан многочлен** $\mathrm{P}(x) = x^3 - 3(a+2)x^2 + (2a^2 + 8a + 5)x - 2a^2 - 5a, \quad a \in \Re$.

а) Найдите все значения $a$ такие, что многочлен $\mathrm{P}$ делится без остатка на многочлен $Q(x) = x^2 - 1$.

б) Найдите все значения $a$ такие, что многочлен $\mathrm{P}$ имеет три вещественных корня (не обязательно различных), сумма которых равна $9$.

в) Найдите все значения $a$ такие, что многочлен $\mathrm{P}$ имеет три вещественных корня, образующих арифметическую прогрессию.

г) Случайным образом выбирают число $a$ из множества целых чисел, принадлежащих отрезку [-6; 2]. Определите вероятность того, что при этом значении $a$ число $x = 1$ является корнем многочлена $\mathrm{P}$ кратности два.

**Выпускной экзамен 2000 года**
(Санкт–Петербург, математические классы)

## Вариант 2

Из трех предложенных “сюжетов на выбор” Вам следует выбрать один. Таким образом у Вас получится три сюжета — два “обязательных” и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки “5” Вам достаточно верно и полностью решить любые 10 из них. Пользоваться калькуляторами нельзя. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

### *Обязательные задачи*

**1. Дана функция** $f(x)=2^{x^2+4x}$**.**

а) Решите уравнение $f(x)=\frac{1}{16}$.

б) Решите неравенство $f(x)\ge 1$.

в) Сравните числа $f(\log_{\frac{1}{9}}\frac{1}{7})$ и $f(\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2})$.

г) Укажите ординаты всех таких точек графика функции $f$, что для каждой из них расстояние от нее до другой точки графика функции $f$ с той же ординатой не меньше $4$ и не больше $6$.

**2. Дана функция** $f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos 2x$ **.**

а) Решите уравнение $f(x)=0$.

б) Вычислите $f\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

в) Решите неравенство $f(x)<\frac{1+\cos 2x}{4}$ на отрезке $\left[-\pi;\ -\frac{\pi}{4}\right]$.

г) Найдите множество значений функции $f$ на отрезке $[0;\pi]$.

### *Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)*

**3.А. Дано выражение** $f(z)=z^2-2bz+2b+4$ **и множество** $\mathrm{K}$ **комплексных чисел, удовлетворяющих условию** $iz=\bar{z}$**. Точка** $\mathrm{M}$ **комплексной плоскости, соответствующая комплексному числу** $z$**, обозначается** $\mathrm{M}(z)$**.**

а) Изобразите на чертеже множество $\mathrm{K}$ .

б) Пусть $b=-1$. Найдите все корни уравнения $f(z)=0$, принадлежащие множеству $\mathrm{K}$ .

в) Изобразите на чертеже множество комплексных чисел $v=\frac{z}{i}$, где $z\in\mathrm{K}$ .

г) Пусть $O(0)$; $A(-2i)$; $B(z_0)$; $C(2)$. Найдите все вещественные числа $b$, при которых уравнение $f(z)=0$ имеет такой корень $z_0$ , что в четырехугольник $OABC$ можно вписать окружность.

**3.Б. Дана функция** $f(x)=\sqrt{1-2x}+x+1$.

а) Решите неравенство $f(x)\ge 0$.

б) Найдите промежутки монотонности функции $f$ .

в) Постройте множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих условию $|y+1|\le f(x)$.

г) Наудачу выбирают пару чисел $(x;y)$ таких, что $|y+1|\le f(x)$. Определите вероятность того, что $x\le 0$.

**Выпускной экзамен 2000 года**
(Санкт–Петербург, математические классы)

**3.В. Дан многочлен** $\mathrm{P}(x) = x^3 - 2(b+1)x^2 + (b^2 + 4b - 1)x - 2b^2 + 2, \quad b \in \Re$.

а) Найдите все значения $b$ такие, что многочлен $\mathrm{P}$ делится без остатка на многочлен $Q(x) = x^2 - 4$.

б) Найдите все значения $b$ такие, что многочлен $\mathrm{P}$ имеет три вещественных корня (не обязательно различных), сумма которых равна $8$.

в) Найдите все значения $b$ такие, что многочлен $\mathrm{P}$ имеет три вещественных корня, образующих арифметическую прогрессию.

г) Случайным образом выбирают число $b$ из множества целых чисел, принадлежащих отрезку [-3; 7]. Определите вероятность того, что при этом значении $b$ число $x = 2$ является корнем многочлена $\mathrm{P}$ кратности два.