Гущин Д. Д.
www.mathnet.spb.ru

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

1^0. Простейшие уравнения. К простейшим (не обязательно *простым*) уравнениям мы будем относить уравнения, решаемые одним из нижеприведенных равносильных переходов:

$$|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \ge 0 \qquad |f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \le 0$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \qquad |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$|f| + |g| = f + g \Leftrightarrow \begin{cases} f \ge 0 \\ g \ge 0 \end{cases} \qquad |f| + |g| = f - g \Leftrightarrow \begin{cases} f \ge 0 \\ g \le 0 \end{cases}$$

$$|f| + |g| = |f + g| \Leftrightarrow f \cdot g \ge 0 \qquad |f| + |g| = |f - g| \Leftrightarrow f \cdot g \le 0$$

Примеры решения уравнений:

1. $\left|\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x}\right| = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

2. $|x^3 + x - 1| = |x^3 - x + 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 + x - 1 = x^3 - x + 1 \\ x^3 + x - 1 = -(x^3 - x + 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

3. $|x^3 - 3x + 1| = 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x + 1 = 3x + 1 \\ x^2 - 3x + 1 = -3x - 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \\ x = -\sqrt[3]{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{6} \end{array}\right.$.

Примечание: нетрудно видеть, что другие способы решения приведенных задач были бы либо неразумными, либо и вовсе неосуществимыми.

2^0. Простейшие неравенства. К простейшим (не обязательно *простым*) неравенствам мы будем относить неравенства, решаемые одним из нижеприведенных равносильных переходов:

$|f(x)| > f(x) \Leftrightarrow f(x) < 0$ $\qquad$ $|f(x)| \ge f(x)$: все x из ОДЗ – решения

$|f(x)| \le f(x) \Leftrightarrow f(x) \ge 0$ $\qquad$ $|f(x)| < f(x)$: решений нет

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \qquad |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right. \qquad |f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2 \ge g^2 \Leftrightarrow (f - g)(f + g) \ge 0 \qquad |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2 < g^2 \Leftrightarrow (f - g)(f + g) < 0$$

Примеры решения неравенств:

1. $|81x^4 - 16| > 81x^4 - 16 \Leftrightarrow 81x^4 - 16 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{9} < x < \dfrac{2}{9}$.

2. $|x^3 + x - 1| > x^3 - x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 + x - 1 > x^3 - x + 1 \\ x^3 + x - 1 < -(x^3 - x + 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ 2x^3 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0 \end{array}\right.$.

3. $|x^2 - 1| \le |x + 1| \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - (x + 1)^2 \le 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 + x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

3⁰. Использование геометрической интерпретации модуля для решения уравнений и неравенств. Геометрический смысл модуля разности величин — это расстояние между ними. Например, геометрический смысл выражения $|x-a|$ — длина отрезка координатной оси, соединяющего точки с абсциссами x и a. Перевод алгебраической задачи на геометрический язык часто позволяет избежать громоздких выкладок.

Примеры решения задач:

1. $|x-1|+|x-2|=1$. Будем рассуждать следующим образом: исходя из геометрической интерпретации модуля, левая часть уравнения представляет собой сумму расстояний от некоторой точки с абсциссой x до двух фиксированных точек с абсциссами 1 и 2. Тогда очевидно, что все точки с абсциссами из отрезка $[1;\ 2]$ обладают требуемым свойством, а точки, расположенные вне этого отрезка — нет. Отсюда ответ: множество решений уравнения есть отрезок $[1;\ 2]$.

2. $|x-1|-|x-2|=1$. Рассуждая аналогично, получим, что разность расстояний до точек с абсциссами 1 и 2 равна единице только для точек, расположенных на координатной оси правее числа 2. Тогда ответ — луч $[2;\ +\infty)$.

3. $|x+1|+|x-1|>2$. Изобразим на координатной прямой точки, сумма расстояний от которых до точек -1 и 1 в точности равна 2. Это все точки отрезка $[-1;\ 1]$. Очевидно, что для всех чисел вне данного отрезка сумма расстояний будет больше двух, откуда ответ: $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$.

Примечание: *обобщением* решения вышеприведенных уравнений являются следующие равносильные переходы:

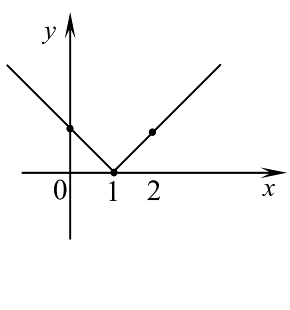
$$|x-a|+|x-b|=b-a,\ b\ge a \iff a\le x\le b$$
$$|x-a|-|x-b|=b-a,\ b\ge a \iff x\ge b.$$

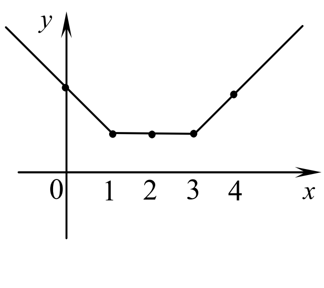
4⁰. Графики простейших функций, содержащих знак абсолютной величины. Под простейшими функциями будем понимать алгебраическую сумму модулей линейных выражений. Сформулируем *утверждение,* позволяющее строить графики таких функций, не раскрывая модули (что особенно важно, когда модулей достаточно много):

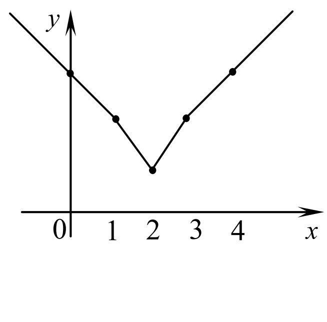
> Алгебраическая сумма модулей n линейных выражений представляет собой кусочно-линейную функцию, график которой состоит из $n+1$ прямолинейного участка. Тогда график может быть построен по $n+2$ точкам, n из которых представляют собой корни внутримодульных выражений, еще одна — произвольная точка, с абсциссой, меньшей меньшего из этих корней, и последняя — с абсциссой, большей большего из корней.

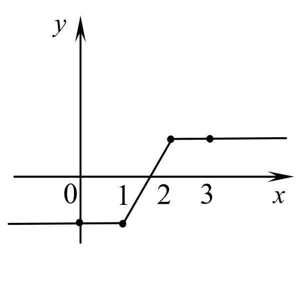
Примеры построения графиков:

1. $f(x)=|x-1|$. Вычисляя значение функции в точках 1, 0 и 2, получаем график, состоящий из двух отрезков прямых (см. рис. 1).
2. $f(x)=|x-1|+|x-2|$. Вычисляя значение функции в точках с абсциссами 1, 2, 0, 3, получаем график, состоящий из трех отрезков прямых (см. рис. 2).
3. $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$. Для построения графика «по отрезкам», вычислим значения функции в точках 1, 2, 3, 0, 4 (см. рис. 3).
4. $f(x)=|x-1|-|x-2|$. График разности модулей строится аналогично (см. рис. 4).









Примечание: анализируя вид графиков 1, 2 и 3, можно предположить, а затем и доказать (например, по индукции), что график суммы модулей последовательных линейных выражений имеет либо острый угол, если их нечетное число, либо участок, параллельный оси абсцисс, если количество складываемых модулей четно. Используем это утверждение для решения задачи, предлагавшейся на одной из региональных олимпиад СПбГУ*.

Задача: в зависимости от значений параметра a, найдите количество решений уравнения

$$|x-1|+|x-2|+...+|x-2000|=a.$$

Решение: решим задачу графически. Пусть

$$f(x)=|x-1|+|x-2|+...+|x-2000|,$$

определим количество точек пересечения графика функции f и прямых $y=a$, в зависимости от a. Исходя из утверждения, сформулированного выше, поскольку число складываемых модулей четно, график функции f будет иметь участок, параллельный оси абсцисс, на промежутке $[1000;1001]$. При этом значения функции для всех точек из этого отрезка будут равны между собой и равны, например,

$$f(1000)=999+998+...+1+0+1+...+999+1000.$$

Поскольку указанная сумма представляет собой удвоенную сумму членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и последним членом 999, сложенную с числом 1000, она равна

$$f(1000)=2\frac{1+999}{2}999+1000=10^6.$$

Тогда, как нетрудно заключить, при $a<10^6$ уравнение не будет иметь решений, при $a=10^6$ их будет бесконечно много, а при $a>10^6$ уравнение будет иметь два решения.

5^0. Разные задачи. В этом пункте рассмотрим различные идеи, применяемые при решении уравнений и неравенств с модулями.

1. Замена переменной.

Для иллюстрации идеи решим несложное неравенство: $x^2-2x\le|1-x|-1$.

Записывая неравенство в виде $(x-1)^2\le|1-x|$ и используя известные свойства модулей

$$|a-b|=|b-a| \quad \text{и} \quad |a|^{2n}=(a)^{2n}\ , \quad n\in\mathbb{N},$$

последовательно получаем:

$$(x-1)^2\le|1-x|\Leftrightarrow|x-1|^2-|x-1|\le0\Leftrightarrow0\le|x-1|\le1\Leftrightarrow|x-1|\le1\Leftrightarrow0\le x\le1.$$

2. Модули неотрицательных выражений.

а) Решим уравнение: $\left|\ldots\left||x|+1\right|+\ldots\right|+10\Big|=55$.

Нетрудно догадаться, что все выражения, стоящие под знаками второго, третьего и т. д. модулей, положительны. И поскольку модуль положительного выражения равен самому этому выражению, получим $\left|\ldots\left||x|+1\right|+\ldots\right|+10\Big|=55\Leftrightarrow|x|+1+2+...+10=55\Leftrightarrow|x|=0\Leftrightarrow x=0$.

б) Аналогично решается уравнение $\dfrac{|x^3+x|}{|x+1|}=\dfrac{2}{x+1}$: поскольку левая часть уравнения неотрицательна при всех допустимых значениях переменной, на множестве корней уравнения правая его часть тоже должна быть неотрицательной, отсюда условие $x>-1$, на этом промежутке знаменатели обеих дробей равны, и остается решить уравнение $|x^3+x|=2$. Решая его и учитывая ограничение $x>-1$, получаем ответ: $x=1$.

---

* В Санкт-Петербургском государственном университете региональные олимпиады для школьников проводят математико-механический факультет, факультет прикладной математики – процессов управления и физический факультеты. Дипломанты олимпиад пользуются льготами при зачислении на факультеты.

3. Геометрическая интерпретация.
Перевод алгебраической задачи на геометрический язык — удобный и мощный метод решения задач (вспомните, например, про геометрический смысл модуля). В качестве еще одного примера разберем блок задач олимпиады математико-механического факультета:

Дана функция: $f(x)=\sqrt{4|x|-x^2}$.

а) Решите уравнение $f(x)=-x-2$;

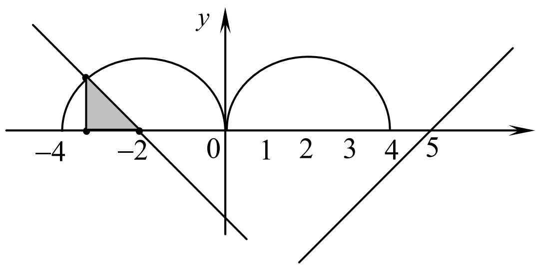
б) Решите неравенство $f(x)>x-5$;

в) Найдите количество решений уравнения $f(x)=a$ в зависимости от a.

Решение: построим график функции *f*. Для этого заметим, что $\sqrt{4|x|-x^2}=\sqrt{4|x|-|x|^2}$, а тогда мы можем сначала построить график функции $y=\sqrt{4x-x^2}$, и затем отразить его относительно оси ординат. Преобразуем выражение, задающее функцию *y*:

$$y=\sqrt{4x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ (x-2)^2+y^2=4 \end{cases}$$

Поскольку данная система определяет верхнюю полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(2;\,0)$, график исходной функции представляет собой объединение полуокружностей указанных на рисунке.



Теперь решение задач не представляет труда:

в) При $a<0$, $a>2$ решений нет, при $a=0$ уравнение $f(x)=a$ имеет три решения, при $0<a<2$ — четыре решения, при $a=2$ — два решения.

б) Неравенство $f(x)>x-5$ выполнено при всех *x* из отрезка $[-4;\,4]$.

а) Корень уравнения есть абсцисса точки пересечения прямой $y=-x-2$ с графиком функции *f*. Найдем ее геометрически: заштрихованный на рисунке прямоугольный треугольник является равнобедренным (угловой коэффициент прямой равен –1), его гипотенуза есть радиус окружности, ее длина 2. Тогда длина катета, лежащего на оси абсцисс есть $\sqrt{2}$, а искомая абсцисса равна $-2-\sqrt{2}$.

4. Раскрытие модулей.
Мы предполагаем, что читателю известен способ раскрытия модулей на промежутках, и приводим здесь соответствующую задачу исключительно для полноты описания методов решения задач. Однако, хотя весь вышеприведенный текст можно было бы назвать «решение задач с модулями без раскрытия модулей», следует признать, что это самый распространенный (не всегда самый эффективный) метод решения задач с модулями.
Решим уравнение: $|1-x|-|x|=|x^2-1|$.

$$|1-x|-|x|=|x^2-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} +(1-x)+x=+(x^2-1), & x<-1 \\ +(1-x)+x=-(x^2-1), & -1\le x<0 \\ +(1-x)-x=-(x^2-1), & 0\le x<1 \\ -(1-x)-x=+(x^2-1), & x\ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=0. \end{array}\right.$$

5. Тождество $\sqrt{f^2}=|f|$.

а) Решим уравнение $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$. Дважды используя тождество $\sqrt{f^2}=|f|$, получим ранее решенное уравнение $|x+1|-|x-2|=3$. Ответ: $[2;\,+\infty)$.

б) Аналогично решается задача одной из региональных олимпиад СПбГУ:

$$\sqrt{x-4\sqrt{x+1}+5}+\sqrt{x+4\sqrt{x+1}+5}=4 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}+2)^2}=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\sqrt{x+1}-2|+|\sqrt{x+1}+2|=4 \Leftrightarrow -2\le\sqrt{x+1}\le 2 \Leftrightarrow -1\le x\le 3.$$

Ответ: $[-1;\,3]$.

6. Теорема о знаках.
Сформулируем теорему, удобную при решении неравенств, относительно произведений или частных разностей модулей: *знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности квадратов этих выражений*.

Решим неравенство:

$$\frac{|x^3+x-1|-|x^3-x+1|}{|x-1|-|x+1|}\geq 0.$$

Воспользуемся теоремой:

$$\frac{|x^3+x-1|-|x^3-x+1|}{|x-1|-|x+1|}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^3+x-1)^2-(x^3-x+1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}\geq 0.$$

Используя формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель на множители и решим полученное рациональное неравенство:

$$\frac{(2x-2)(2x^3)}{-2(2x)}\geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)\leq 0,\ x\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 0<x\leq 1. \end{array}\right.$$

7. Переход к следствию.
Заметим, что при желании, *все* уравнения с модулями могут быть решены следующим образом: раскроем модули со знаками «плюс» и «минус», но не будем выписывать соответствующие промежутки. Решая каждое из полученных уравнений, получим следствия исходного уравнения. Останется только проверить, не приобрели ли мы посторонних корней прямой их подстановкой в исходное уравнение.

Решим уравнение: $||x^3+x+1|-\sqrt{x}|=x^3-x-\sqrt{x}-1$.

Последовательно переходя к следствиям, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} |x^3+x+1|-\sqrt{x}=x^3-x-\sqrt{x}-1 \\ -(|x^3+x+1|-\sqrt{x})=x^3-x-\sqrt{x}-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3+x+1|=x^3-x-1 \\ -|x^3+x+1|=x^3-x-2\sqrt{x}-1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+x+1=x^3-x-1 \\ -(x^3+x+1)=x^3-x-1 \\ -(x^3+x+1)=x^3-x-2\sqrt{x}-1 \\ x^3+x+1=x^3-x-2\sqrt{x}-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x^3=\sqrt{x} \\ x+\sqrt{x}+1=0, \text{ решений нет} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Нетрудно убедиться, что найденные числа не являются корнями исходного уравнения.
Ответ: решений нет.

8. Метод интервалов.
Применение метода интервалов основано на следующем утверждении: *функция, непрерывная на промежутке, может менять знак только при переходе через нуль*. Это означает, что нули функции и границы промежутков ее непрерывности разделяют область определения функции на участки, где она сохраняет постоянный знак (т. е. на участки, где функция принимает только положительные или только отрицательные значения). Применение метода поясним на примере.

Решим неравенство: $||x^3+x+1|-\sqrt{x}|>x^3-x-\sqrt{x}-1$.

Пусть $f(x)=||x^3+x+1|-\sqrt{x}|-(x^3-x-\sqrt{x}-1)$. Областью определения введенной функции f является луч $[0;+\infty)$. Решая уравнение $f(x)=0$ (см. п. 8), получаем, что функция не обращается в нуль ни при каком значении переменной. Это означает, что на всей области определения функция является знакопостоянной. Вычисляя, например, $f(0)=2$, получаем, что функция принимает только положительные значения. Тогда исходное неравенство выполнено при любых *x*, принадлежащих лучу $[0;+\infty)$.

Ответ: $[0;+\infty)$.