Вычисление расстояний и углов

Ю. Ионин, В. Некрасов

В этой статье рассматривается несколько геометрических задач, для решения которых необходимо вычислить те или иные расстояния или углы в пространстве (эти задачи предлагались на вступительных экзаменах в разные вузы). Задачи такого типа удобно решать с помощью скалярного произведения векторов. Основной метод решения заключается в том, что в пространстве выбирается подходящий базис и составляется таблица умножения — таблица скалярных произведений векторов этого базиса. Имея такую таблицу и зная разложение векторов в выбранном базисе, вычислить длины этих векторов и углы между ними уже легко. Мы начнем с простой задачи, где этот метод напрашивается сам собой, а затем перейдем к более сложным задачам, продемонстрировав на них все основные случаи.

Задача 1. В треугольной пирамиде *ABCD* все ребра имеют одинаковую длину. Точка *M* — середина ребра *AD*, точка *O* — центр треугольника *ABC*, точка *N* — середина ребра *AB* и точка *K* — середина ребра *CD*. Найдите угол между прямыми *MO* и *KN*.

Решение. Примем длину ребра тетраэдра за единицу и выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Составим таблицу умножения для этого базиса (табл. 1). Разложим векторы $\overrightarrow{MO}$ и $\overrightarrow{KN}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

Таблица 1

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\vec{b}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\vec{c}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{6}(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}).$$

Угол φ между прямыми *MO* и *KN* вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{KN}|}{|\overrightarrow{MO}|\cdot|\overrightarrow{KN}|}.$$

Найдем $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{KN}$, $|\overrightarrow{MO}|$ и $|\overrightarrow{KN}|$, пользуясь таблицей 1:

$$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{KN}=\frac{1}{12}(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c})(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=\frac{1}{12};$$
$$|\overrightarrow{MO}|=\frac{1}{6}\sqrt{(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c})^2}=\frac{1}{2};\ |\overrightarrow{KN}|=\frac{1}{2}\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{6}$, $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Однако условие задачи не всегда позволяет выбрать базис с полностью определенной таблицей умножения. В этом случае нужно попытаться составить уравнение относительно недостающего элемента.

Задача 2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна *a*, точки *O* и O_1 являются центрами оснований *ABC* и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5a}{6}$. Определите высоту призмы.

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{p}$ (рис. 1). Пусть $h = |\vec{m}|$. Таблица 2 — это таблица умножения для базиса $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})$.

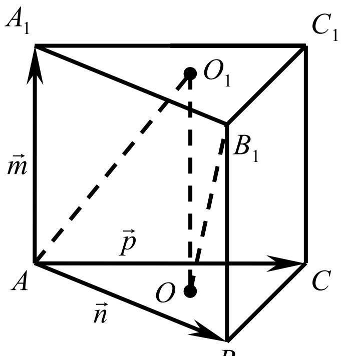

Рис. 1

Ортогональная проекция отрезка AO_1 на прямую B_1O равна длине этого отрезка, умноженной на косинус угла φ между прямыми AO_1 и B_1O. Чтобы вычислить $|\overrightarrow{AO_1}|$ и $\cos\varphi$, разложим векторы $\overrightarrow{AO_1}$ и $\overrightarrow{B_1O}$ в базисе $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})$:

$$\overrightarrow{AO_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}) = \frac{1}{3}(\vec{m} + \vec{m} + \vec{n} + \vec{m} + \vec{p}) = \frac{1}{3}(3\vec{m} + \vec{n} + \vec{p});$$

$$\overrightarrow{B_1O} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{3}(\vec{n} + \vec{p}) - (\vec{m} + \vec{n}) = \frac{1}{3}(-3\vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}).$$

Таблица 2

	$\vec{m}$	$\vec{n}$	$\vec{p}$
$\vec{m}$	h^2	0	0
$\vec{n}$	0	a^2	$\frac{a^2}{2}$
$\vec{p}$	0	$\frac{a^2}{2}$	a^2

Используя таблицу 2, находим:

$$|\overrightarrow{AO_1}| = |\overrightarrow{B_1O}| = \frac{1}{3}\sqrt{9h^2 + 3a^2}, \quad \overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{B_1O} = -\frac{1}{6}(6h^2 + a^2),$$

$$\cos\varphi = \frac{6h^2 + a^2}{2(3h^2 + a^2)}.$$

Поскольку $|\overrightarrow{AO_1}| \cdot \cos\varphi = \frac{5a}{6}$, мы получаем уравнение

$$\frac{(6h^2 + a^2)\sqrt{9h^2 + 3a^2}}{6(3h^2 + a^2)} = \frac{5a}{6}.$$

Отсюда $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Можно выделить четыре основных типа задач на вычисление расстояний и углов.

1. Расстояние от точки до прямой.

Дано: точка *M*; прямая *l* с направляющим вектором $\vec{a}$, точка *A*, принадлежащая прямой *l*; $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$.

Найти: расстояние от точки *M* до прямой *l*.

(Векторы $\vec{a}$ и $\vec{m}$ в условии задачи даны в том смысле, что известны их разложения в некотором базисе с заданной таблицей умножения.)

Приведем схему решения этой задачи.

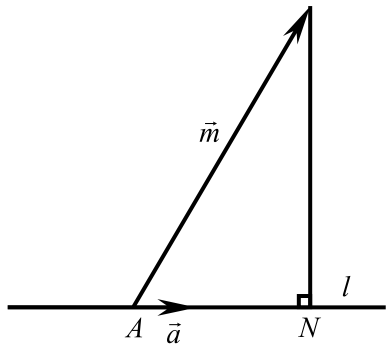

Рис. 2

Пусть *N* — ортогональная проекция точки *M* на прямую *l* (рис. 2). Тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = x\vec{a} - \vec{m}$. Неизвестный коэффициент *x* находится из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\vec{a}$: $(x\vec{a} - \vec{m}) \cdot \vec{a} = 0$. Искомое расстояние: $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x\vec{a} - \vec{m})^2}$.

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $SA = 4$) точка D лежит на ребре SC, $CD = 3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найдите объем пирамиды.

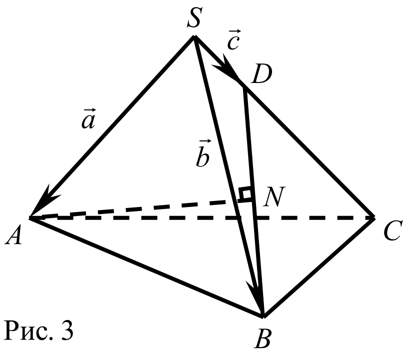

Рис. 3

Решение. Выберем базис из векторов $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{c}$. Составим таблицу умножения для этого базиса, обозначив через φ плоский угол при вершине пирамиды (табл. 3). По условию расстояние от точки A до BD прямой равно 2. Вычислив это расстояние с помощью таблицы 3, мы получим уравнение, позволяющее найти $\cos\varphi$.

Пусть N — проекция точки A на прямую BD (рис. 3). Тогда

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DA} = x\,\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = x(\vec{b} - \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{c}) =$$
$$= -\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c}\,.$$

Так как векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{DB}$ перпендикулярны, получаем $(-\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$. Используя таблицу 3, после упрощения находим:

Таблица 3

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	16	$16\cos\varphi$	$4\cos\varphi$
$\vec{b}$	$16\cos\varphi$	16	$4\cos\varphi$
$\vec{c}$	$4\cos\varphi$	$4\cos\varphi$	1

$$(17x - 1) - 8(x+1)\cos\varphi = 0\,. \quad (1)$$

Вычислим теперь длину вектора $\overrightarrow{AN}$:

$$|\overrightarrow{AN}|^2 = (\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c})^2 =$$
$$= 17x^2 - 2x + 17 - 8(x+1)^2\cos\varphi\,.$$

Так как $|\overrightarrow{AN}|^2 = 4$,

$$17x^2 - 2x + 13 - 8(x+1)^2\cos\varphi = 0\,. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем $x = \dfrac{7}{9}$. Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{55}{64}$.

Найдем теперь длину отрезка SO — высоту пирамиды. Так как O — центр треугольника ABC,

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c})\,,$$

откуда

$$|\overrightarrow{SO}| = \frac{1}{3}\sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{48 + 96\cos\varphi} = \frac{\sqrt{58}}{2}.$$

Чтобы найти площадь основания пирамиды, вычислим $|\overrightarrow{AB}|^2$:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \frac{9}{2}.$$

Теперь искомый объем

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot |\overrightarrow{SO}| = \frac{3\sqrt{174}}{16}.$$

2. Расстояние от точки до плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

Дано: плоскость α с базисом $(\vec{a};\vec{b})$, точка A, принадлежащая плоскости α, точка M, не лежащая в плоскости α, $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$.

Найти: расстояние от точки M до плоскости α и угол между прямой AM и плоскостью α.

Схема решения этой задачи такова.

Пусть N — ортогональная проекция точки M на плоскость α (рис. 4). Тогда $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m}$. Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{MN}$ векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

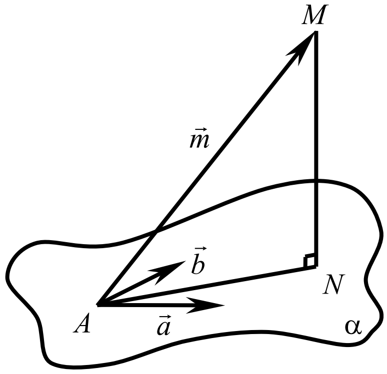

Рис. 4

$$\begin{cases}(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})\cdot\vec{a}=0,\\(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})\cdot\vec{b}=0.\end{cases}$$

Зная x и y, находим расстояние от точки M до плоскости α, равное $\sqrt{(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})^2}$.

Если $x\vec{a}+y\vec{b}\neq 0$, то угол между прямой AM и α равен углу между векторами $\vec{m}$ и $x\vec{a}+y\vec{b}$, а если $x\vec{a}+y\vec{b}=0$, то прямая AM перпендикулярна плоскости α.

Задача 4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом $\angle A=60^0$. Все ребра призмы имеют длину a. Точка K является ортогональной проекцией точки B_1 на плоскость DA_1C_1, а точка L — ортогональной проекцией точки K на плоскость DD_1C_1C. Найдите объем пирамиды $DCLK$.

Решение. Примем за основание пирамиды $DCLK$ треугольник CDL, лежащий в плоскости DD_1C_1C. Тогда отрезок KL — высота пирамиды (рис. 5). Следовательно,

$$V_{KCDL}=\frac{1}{3}S_{CDL}\cdot KL=\frac{1}{6}DC\cdot LM\cdot KL,$$

где M — ортогональная проекция точки L на прямую DC.

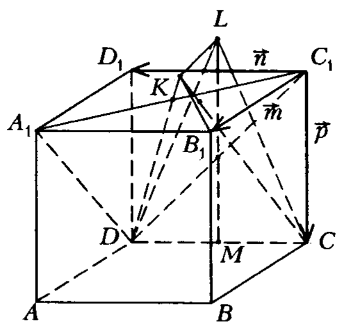

Рис. 5

Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{C_1B_1}=\vec{m}$, $\overrightarrow{C_1D_1}=\vec{n}$, $\overrightarrow{C_1C}=\vec{p}$ и заполним таблицу 4 — таблицу умножения для этого базиса.

Таблица 4

	$\vec{m}$	$\vec{n}$	$\vec{p}$
$\vec{m}$	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
$\vec{n}$	$\frac{a^2}{2}$	a^2	0
$\vec{p}$	0	0	a^2

Далее,

$$\overrightarrow{B_1K}=\overrightarrow{C_1K}-\overrightarrow{C_1B_1}=x\,\overrightarrow{C_1A_1}+y\,\overrightarrow{C_1D}-\overrightarrow{C_1B_1}=$$
$$=x(\vec{m}+\vec{n})+y(\vec{n}+\vec{p})-\vec{m}=(x-1)\vec{m}+(x+y)\vec{n}+y\vec{p}.$$

Так как вектор $\overrightarrow{B_1K}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{C_1A_1}$ и $\overrightarrow{C_1D}$, получаем систему

$$\begin{cases}\overrightarrow{B_1K}\cdot(\vec{m}+\vec{n})=0,\\\overrightarrow{B_1K}\cdot(\vec{n}+\vec{p})=0.\end{cases}$$

Заменив вектор $\overrightarrow{B_1K}$ его разложением в базисе $(\vec{m};\ \vec{n};\ \vec{p})$ и воспользовавшись таблицей 4, придем после упрощений к системе уравнений $2x+y=1$, $3x+4y=1$, откуда $x=\frac{3}{5}$, $y=-\frac{1}{5}$.

Следовательно, $\overrightarrow{C_1K}=\frac{3}{5}(\vec{m}+\vec{n})-\frac{1}{5}(\vec{n}+\vec{p})=\frac{1}{5}(3\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p})$.

Аналогично

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{C_1L}-\overrightarrow{C_1K}=z\,\overrightarrow{C_1D_1}+t\,\overrightarrow{C_1C}-\overrightarrow{C_1K}=$$
$$=z\vec{n}+t\vec{p}-\frac{1}{5}(3\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p})=\frac{1}{5}(-3\vec{m}+(5z-2)\vec{n}+(5t+1)\vec{p}).$$

Так как $\overrightarrow{KL}\cdot\vec{n}=0$ и $\overrightarrow{KL}\cdot\vec{p}=0$, то $-\frac{3}{2}+5z-2=0$, откуда $z=\frac{7}{10}$, и $5t+1=0$, откуда $t=-\frac{1}{5}$.

Следовательно,

$$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{5}\left(-3\vec{m}+\frac{3}{2}\vec{n}\right)=\frac{3}{10}(-2\vec{m}+\vec{n}).$$

Теперь можно найти высоту пирамиды $KCDL$:

$$KL=\frac{3}{10}\sqrt{(-2\vec{m}+\vec{n})^2}=\frac{3a\sqrt{3}}{10}.$$

Осталось найти $\overrightarrow{LM}$:

$$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{CL}-\overrightarrow{CM}=u\,\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{C_1L}-\overrightarrow{C_1C})=u\vec{n}-z\vec{n}-t\vec{p}+\vec{p}=\left(u-\frac{7}{10}\right)\vec{n}+\frac{6}{5}\vec{p}.$$

Так как $\overrightarrow{LM}\cdot\vec{n}=0$, то $u=\frac{7}{10}$, откуда $\overrightarrow{LM}=\frac{6}{5}\vec{p}$, $|\overrightarrow{LM}|=\frac{6a}{5}$.

Таким образом,

$$V_{KCDL}=\frac{1}{6}\cdot a\cdot\frac{6a}{5}\cdot\frac{3a\sqrt{3}}{10}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{50}.$$

3. Расстояние и угол между скрещивающимися прямыми.

Дано: прямая l_1 с направляющим вектором $\vec{a}_1$, точка A_1, принадлежащая прямой l_1; прямая l_2, с направляющим вектором $\vec{a}_2$, точка A_2, принадлежащая прямой l_2; $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{m}$.

Найти: расстояние и угол между прямыми l_1 и l_2.

Задачи этого типа решаются по следующей схеме.

Косинус угла φ между прямыми l_1 и l_2 находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}.$$

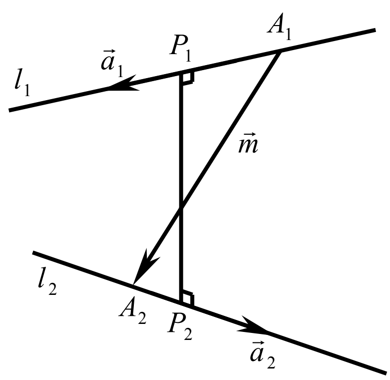

Рис. 6

Чтобы определить расстояние между прямыми l_1 и l_2, то есть длину их общего перпендикуляра P_1P_2 ($P_1\in l_1$, $P_2\in l_2$, рис. 6), подставим вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ в виде $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2P_2}=x\vec{a}_1+\vec{m}+y\vec{a}_2$. Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условий перпендикулярности вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$ векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$:

$$\begin{cases}(x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 - \vec{m}) \cdot \vec{a}_1 = 0, \\ (x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 - \vec{m}) \cdot \vec{a}_2 = 0.\end{cases}$$

Искомое расстояние — длина вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$, то есть $\sqrt{(x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + \vec{m})^2}$.

Задача 5. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

Решение. Пусть M и N — середины ребер BC и AB (рис. 7).

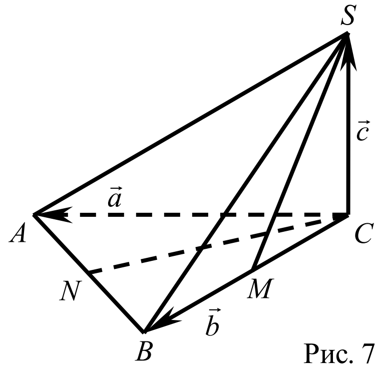

Рис. 7

Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CS} = \vec{c}$. Таблица умножения для этого базиса — это таблица 5. Найдем угол φ между прямыми SN и CN:

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CS} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{c})\,;\ \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\,.$$

Вычислим $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{CN}$, $|\overrightarrow{SM}|$, $|\overrightarrow{CN}|$:

$$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{CN} = 12\,,\ |\overrightarrow{SM}| = 2\sqrt{3}\,,\ |\overrightarrow{CN}| = 2\sqrt{6}\,.$$

Следовательно, $\cos\varphi = \dfrac{12}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = 45^0$.

Таблица 5

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	32	16	0
$\vec{b}$	16	32	0
$\vec{c}$	0	0	4

Вычислим теперь расстояние между прямыми SM и CN, т. е. длину их общего перпендикуляра PQ ($P \in SM$, $Q \in CN$):

$$\overrightarrow{PQ} = x\,\overrightarrow{SM} + y\,\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{SC} = \frac{x}{2}(\vec{b} - 2\vec{c}) + \frac{y}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} =$$
$$= \frac{1}{2}(y\vec{a} + (x+y)\vec{b} - (2x+2)\vec{c})\,.$$

Из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{PQ}$ векторам $\vec{b} - 2\vec{c}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ получаем систему уравнений

$$3x + 3y = -1\,,\ x + 2y = 0\,,$$

откуда $x = -\dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$.

Следовательно,

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{6}(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c})\,,\ PQ = \frac{1}{6}\sqrt{(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,.$$

4. Угол между плоскостями.

Угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярными им прямыми. Действительно, пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис. 8). Через какую-нибудь точку, не лежащую на прямой c, проведем прямые a и b, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно. Тогда плоскость, проходящая через прямые a и b, пересекает плоскости α и β по прямым a_1 и b_1, перпендикулярные прямой c (рис. 8). Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a_1 и b_1, который, в свою очередь, равен углу между прямыми a и b (так как прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости и $a \perp a_1$, $b \perp b_1$).

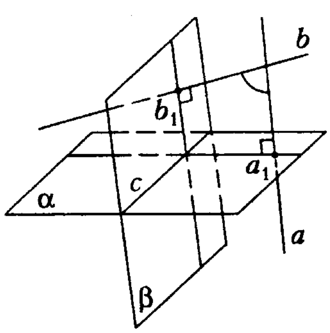

Рис. 8

Таким образом, задача нахождения угла между плоскостями сводится к вычислению угла между прямыми.

Задача 6. В основании треугольной пирамиды *SABC* лежит правильный треугольник *ABC* со стороной 1, ребро *SA* пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $SA = \sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым *SC* и *AC*, плоскость β параллельна прямым *SC* и *AB*. Определите величину угла между плоскостями α и β.

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AS} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Таблица 6 — это таблица умножения для векторов этого базиса. Если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — нулевые векторы, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно, а φ — угол между этими плоскостями, то

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}.$$

Таблица 6

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	3	0	0
$\vec{b}$	0	1	$\frac{1}{2}$
$\vec{c}$	0	$\frac{1}{2}$	1

В качестве вектора $\vec{m}$ можно взять любой ненулевой вектор, удовлетворяющий условиям $\overrightarrow{SB}\cdot\vec{m} = 0$, $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m} = 0$.

Запишем вектор $\vec{m}$ в виде $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Так как $\overrightarrow{SB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} (\vec{b} - \vec{a})(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 0, \\ \vec{c}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 0. \end{cases}$$

С помощью таблицы 6 приводим эту систему к виду $6x - 2y - z = 0$, $y + 2z = 0$.

Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных. Это объясняется тем, что вектор $\vec{m}$ условием $\vec{m} \perp \alpha$ не определен однозначно. Решение такой системы сводится к выражению двух неизвестных через третье. Выразим *x* и *y* через *z*: $x = -\frac{1}{2}z$, $y = -2z$.

Положив теперь, например, $z = -2$, найдем *x* и *y*: $x = 1$, $y = 4$. Вектор $\vec{m} = \vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ — один из ненулевых векторов, перпендикулярных плоскости α.

Аналогично будем искать ненулевой вектор $\vec{n} = t\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$, перпендикулярный плоскости β: $\overrightarrow{SC}\cdot\vec{n} = 0$, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 0$;

$$\begin{cases} (\vec{c} - \vec{a})(t\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}) = 0, \\ \vec{b}(t\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}) = 0, \end{cases}$$

так что $y = -\frac{1}{2}u$, $v = -2u$.

Можно взять $u = -2$. Тогда $v = 4$, $t = 1$, так что $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$. (Выражение для вектора $\vec{n}$ можно было получить из выражения для вектора $\vec{m}$, заметив, что условие, задающее плоскость β, получается из условия, задающего плоскость α, перестановкой точек *B* и *C*.)

Теперь вычисляем $\cos\varphi$:

$$\vec{m}\cdot\vec{n} = (\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}) = -3,$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{(\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c})^2} = \sqrt{15},\ |\vec{n}| = \sqrt{15},\ \cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, $\varphi = \arccos\frac{1}{5}$.

Упражнения

1. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны AD. Найдите AD, если $AK = 6$, $AM = 3$ и $\angle KAM = 60^0$.
   Ответ: 4.
2. В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E — середина ребра AB. Найдите угол между прямыми MN и DE.
   Ответ: $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{18}$.
3. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны α. Боковые ребра AA', BB', CC' образуют с плоскостью основания углы в 60^0, а диагональ BC' боковой грани $CBB'C'$ перпендикулярна ребру AC. Найдите объем призмы, если длина диагонали BC' равна $a\sqrt{6}$.
   Ответ: $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$, $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна a, длина бокового ребра равна $\frac{a}{2}$. Точка D является ортогональной проекцией середины ребра A_1C_1 на плоскость AB_1C, а точка E — ортогональной проекцией точки D на плоскость AA_1B_1B. Найдите объем пирамиды A_1B_1DE.
   Ответ: $\frac{3a^3\sqrt{3}}{256}$.
5. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные плоскости SAD.
   а). Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BD такую, что $\frac{BM}{DB} = \frac{1}{3}$. Найдите его длину.
   Ответ: $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.
   б). Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.
   Ответ: $\frac{a\sqrt{10}}{4}$.