

Вариант 1

1. Упростить выражение $\left(\frac{\sqrt[4]{ab^3} - \sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ab+1}}{\sqrt[4]{ab}} \right)^{-2} \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}}}$.
2. Решить уравнение $\frac{\cos x - \sin 2x}{\cos 3x} = 1$.
3. Решить неравенство $\log_x \log_4(16^x - 12) \geq 1$.
4. Решить уравнение $\sqrt{1 - 2 \cdot 3^x + 9^x} = 3^{2x+1} + 3 \cdot 3^x - \frac{2}{3}$.
5. Вычислить $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$.

Ответы:

1. $\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$; 2. $\{\pi k : k \in \mathbf{Z}\}$; 3. $(\log_{16} 13; 1) \cup (1; +\infty)$; 4. $x = -1$; 5. $1/8$.

Вариант 2

1. Вычислить $\sqrt{|20\sqrt{7} - 53|} - \sqrt{20\sqrt{7} + 53}$.
2. Решить уравнение $(3 - 2^x) \log_{1/3} \frac{2x+1}{4x+7} = |2^x - 3|$.
3. Доказать тождество $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} (1 + \cos 4\alpha) = \sin 4\alpha$.
4. Решить неравенство $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$.
5. При каких значениях параметра α уравнение $x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin \alpha}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos \alpha} + 36 = 0$ имеет единственное решение?

Ответы:

1. -10 ; 2. $x = \log_2 3$; 4. $(-1; 1)$; 5. $\{\pi/18 + 2\pi k; 13\pi/18 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k: k \in \mathbf{Z}\}$.

Вариант 3

1. Решить уравнение $(x-1)^{4x^2+3} = (x-1)^{8x}$.
2. Решить неравенство $\lg((3x^2 - 1)(6x - 7)) + \log_{0,1}(6x - 7) \geq \lg 30 - 1$.
3. При каких значениях аргумента x график функции $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x}$ лежит выше графика функции $g(x) = x - 2$?
4. Решить уравнение $\sin^2 3x + \sin^2 5x = 2\sin^2 4x$.
5. Две машинистки должны напечатать рукопись объёмом 96 страниц. Если первая машинистка начнёт работать на два часа раньше второй, то каждая напечатает по половине рукописи, и они закончат работу одновременно. Если же обе машинистки начнут работать в одно и тоже время, то через 6 часов им останется напечатать 12 страниц. За какое время сможет перепечатать рукопись каждая машинистка в отдельности?

Ответы:

1. $x = 2/3$; 2. $(7/6; +\infty)$; 3. $(-\infty; 0] \cup (4; +\infty)$; 4. $\{\pi k; \pi/16 + \pi k/8; k \in \mathbf{Z}\}$; 5. 16 ч, 12 ч.

Вариант 4

1. Решить уравнение $\sin 6x \cos 2x = \sin 5x \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$.
2. Решить неравенство $\sqrt{1 - 4 \log_{1/2}^2 x} < 1 - \log_{1/2} x$.
3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{2x-y} = 3^2, \\ 5y + x = 23. \end{cases}$$
4. Разрешить уравнение относительно параметра $a \frac{4a}{x^2 - a^2} + \frac{x - a}{x(x + a)} = \frac{1}{x(x - a)}$.
5. За 1 кг одного вида продукта и 10 кг другого вида продукта заплачено 20000 рублей. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 18200 рублей. Сколько стоит килограмм каждого продукта?

Ответы:

1. $\{\pi k/2; -\pi/6 + \pi k; \pi/6 + \pi k: k \in \mathbf{Z}\}$; 2. $[1/\sqrt{2}; 2^{-2/5}) \cup (1; \sqrt{2}]$. 3. (3; 4); 4. 1 решение при $a \neq 1, a \neq 1/2$ (при $a = 1, a = 1/2$ решений нет); 5. 8000 руб., 1200 руб.

Вариант 5

1. Упростить выражение $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = A$, где $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.
2. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{3-x}}{\log_{0,5}(x^2-3x+2,25)}$.
3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ 2xy - y^2 = 15. \end{cases}$
4. Решить уравнение $\sin x - \cos x = 1 - \sin 2x + 2(\sin^3 x - \cos^3 x)$.
5. В равнобедренном треугольнике высоты, проведённые к основанию и боковой стороне, равны 10 см и 12 см. Найти длину основания треугольника.

Ответы:

1. при $ab > 0$ $A = \begin{cases} a - b, a > b, \\ \frac{b}{a}(b - a), a < b, \\ 0, a = b \end{cases}$ 2. $(-\infty; 1/2) \cup (1/2; 3/2) \cup (3/2; 5/2) \cup (5/2; 3]$;
3. $\{(3\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-3\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (4; 5); (-4; -5)\}$; 4. $\{\pi/4 + \pi k; 2\pi k; -\pi/2 + 2\pi k; k \in \mathbf{Z}\}$; 5. 15 см.

Вариант 6

1. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt[6]{2^{2+x} - 2^{2-x} - 15}$.
2. Доказать тождество $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$, где α, β, γ — углы треугольника.
3. Разложить на простейшие множители $(a-b)^3 + (b-c)^3 - (a-c)^3$.
4. Решить неравенство $\frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+1)} > \frac{1}{2}$.
5. При каких вещественных значениях параметра n неравенство $nx^2 - 2(n+3)x + n < 0$ верно при всех x из промежутка $[-2; 1]$?

Ответы:

1. $[2; +\infty)$; 3. $-3(a-c)(b-c)(a-b)$; 4. $(5; +\infty)$; 5. $n < -4/3$.

* Выдержки из книги

Свенцицкая Т. А., Хамов Г. Г., **Математика (письменный экзамен): пособие для поступающих в вузы.** — СПб, Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2000.