Санкт–Петербургский государственный университет, 2000 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a при которых уравнение $\sqrt{9-x^2} = a + \sqrt{x^2 - ax}$ имеет два решения.
2. Решите уравнение $\mathrm{tg}\left|\frac{\pi}{6} - 2x\right| = \mathrm{tg}\ 3x$.
3. Решите неравенство $\log_2(x^2 - 5x) - \log_2(2x^2 - 3x) \le \log_2(x+3)$.
4. Точка O является общим центром двух окружностей. Вершины треугольника ABC лежат на внешней окружности. Две его стороны касаются внутренней окружности, а третья сторона пересекает эту окружность в точках M и N. Найти отношение радиусов этих окружностей, если известно, что $\angle MON = \varphi$.
5. Две треугольные пирамиды $MABC$ и $NABC$ имеют общее основание ABC и не имеют других общих точек. Все вершины обеих пирамид лежат на одной и той же сфере. Найти длины ребер MA и MB, если известно, что они равны между собой, а длины всех остальных ребер обеих пирамид равны 1.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a при которых уравнение $8 + \sqrt{x^2 - x - 2} = 2a + \sqrt{a^2 - x^2}$ имеет два решения.
2. Решите уравнение $\mathrm{tg}\left|\frac{\pi}{3} + x\right| + \mathrm{tg}\ 3x = 0$.
3. Решите неравенство $\log_3(2x^2 - 4x) + \log_3(x+4) \ge \log_3(x^2 - 7x)$.
4. Точка O является общим центром двух окружностей. Вершины равнобедренного треугольника ABC лежат на внешней окружности. Его основание AC касается внутренней окружности, а боковые стороны пересекают ее. Найдите отношение радиусов этих окружностей, если известно, что $\angle POQ = \alpha$, где P и Q — точки пересечения внутренней окружности со стороной AB.
5. Две треугольные пирамиды $ABCK$ и $ABCL$ имеют общее основание ABC и не имеют других общих точек. Все вершины обеих пирамид лежат на одной и той же сфере. Найти длину ребра BC, если известно, что длины всех остальных ребер равны 1.